



① به ازای کدام مجموعه برای m ، در معادله درجه دوم $x^2 - 4x = m - mx$ مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی، ۱۶ برابر حاصل ضرب آن‌هاست؟

- (۱) $\{ \}$ (۲) $\{-2, -8\}$ (۳) $\{-2\}$ (۴) $\{-8\}$

② به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 - (m-1)x + 9 = 0$ فاقد ریشه حقیقی می‌باشد؟

- (۱) $(-7, 5)$ (۲) $(-6, 6)$ (۳) $(-5, 7)$ (۴) $(-7, 7)$

③ به ازای چند مقدار m ، بیشترین مقدار تابع $f(x) = mx^2 - (m+3)x + 5$ برابر یک است؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

④ چند عدد حقیقی وجود دارد که اگر آن را با یک جمع کنیم، نتیجه برابر با دو برابر جذر آن عدد می‌شود؟

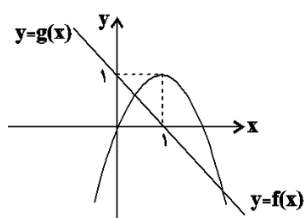
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

⑤ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x = x$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_1^3 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

$$4x^2 + 51x = 221 \quad (۲) \quad 4x^2 = 51 + 221 \quad (۱)$$

$$4x^2 + 51x = 197 \quad (۴) \quad 4x^2 = 51x + 197 \quad (۳)$$

⑥ نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله $f(x) = g^2(x)$ ، کدام است؟



- (۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2

⑦ اگر مجموع ریشه‌های معادله $3x^2 - (k+1)x - 2 = 0$ برابر ۲ باشد، مینیمم تابع $f(x) = 2x^2 + 2x - k$ کدام است؟

- (۱) -5 (۲) $-5/5$ (۳) -6 (۴) $-6/5$

۸) اگر صفرهای یک تابع درجه دوم برابر ۱ و ۳ باشد و از نقطه (۲, ۱) بگذرد، این تابع محوری ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱) ۳
۲) -۳
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $-\frac{3}{2}$

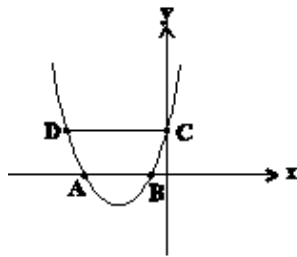
۹) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x - 2 = 0$ باشند، آنگاه حاصل عبارت $4\alpha^2 - 12\alpha + 2\beta^2$ کدام است؟

- ۱) ۸۴
۲) ۷۲
۳) ۸۰
۴) ۷۰

۱۰) به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = mx^2 - mx + 1$ بر محور x ها مماس و رو به بالا است؟

- ۱) ۲
۲) ۱
۳) ۴
۴) -۴

۱۱) شکل زیر مربوط به سهمی $y = 3x^2 - kx + 1$ است. اگر معادله محور تقارن آن $x = \frac{-2}{3}$ باشد، مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟



- ۱) ۱
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) ۲

۱۲) تعداد جواب‌های قابل قبول برای معادله $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ کدام است؟

- ۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۳) از یک رشته سیم به طول ۶۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۸۹ متر مربع بسازیم. طول مستطیل از عرض آن چه قدر بیشتر می‌شود؟

- ۱) ۱
۲) ۱۲
۳) ۲۰
۴) ۱۴

۱۴) اگر α و β جواب‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 5 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ کدام است؟

- ۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۱۲
۴) ۸

۱۵) یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 - (4a + 1)x + 4a = 0$ از ۱۰ برابر ریشه دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{9}$
۲) $\frac{4}{5}$
۳) $\frac{9}{5}$
۴) $\frac{5}{4}$

۱۶) محدوده a کدام باشد تا نمودار تابع درجه دوم $y = (a+6)x^2 + (a-2)x + 1$ از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور نکند؟

- (۱) $-6 < a < -2$ (۲) $a \leq -6$ (۳) $a \geq -2$ (۴) $a > 5$

۱۷) اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $y = x^3 - x^2 + kx + 4$ باشد، مجموع مربعات دو صفر دیگر تابع چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۸) اگر معادله $x^2 - mx^2 + m - 1 = 0$ دارای دو ریشه مضاعف باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

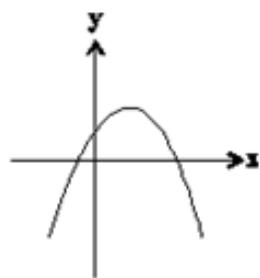
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹) به ازای چند مقدار طبیعی m معادله $(m+6)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) بی‌شمار

۲۰) سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(-2, 0)$ ، $(6, 0)$ و $(-3, 6)$ می‌گذرد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{15}$



۲۱) در شکل زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. کدام گزینه درست است؟

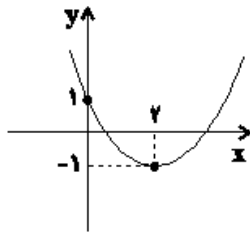
- (۱) $c < 0$ و $b < 0$ و $a < 0$ و معادله $P(x) = 0$ دو ریشه دارد.
 (۲) $c > 0$ و $b > 0$ و $a < 0$ و معادله $P(x) = 0$ ریشه ندارد.
 (۳) $c > 0$ و $b < 0$ و $a > 0$ و معادله $P(x) = 0$ ریشه ندارد.
 (۴) $c > 0$ و $b > 0$ و $a < 0$ و معادله $P(x) = 0$ دو ریشه دارد.

۲۲) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بین ضرایب، رابطه $4a + c = 2b$ برقرار باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها همواره کدام است؟

- (۱) $\frac{c}{2a}$ (۲) ۲ (۳) $2 - \frac{b}{a}$ (۴) $2 + \frac{b}{a}$

۴۳) شکل زیر، نمودار یک سهمی به معادله

$P(x) = ax^2 + bx + c$ است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{3}$
- (۳) ۱
- (۴) -۱

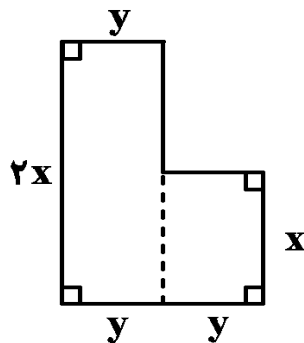
۴۴) به ازای کدام مقدار m ، معادله $(m-2)x^2 + (2m\sqrt{5m})x + m^2 - 2m = 0$ دو ریشه حقیقی معکوس هم دارد؟

- (۱) -۱
- (۲) صفر
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۴۵) اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 6 = 0$ باشند، آن گاه به ازای چه مقداری از k ریشه‌های معادله $3x^2 + kx + m = 0$ به صورت $\{\alpha^3\beta, \beta^3\alpha\}$ است؟

- (۱) $-\frac{147}{5}$
- (۲) $\frac{441}{5}$
- (۳) $\frac{147}{5}$
- (۴) $-\frac{441}{5}$

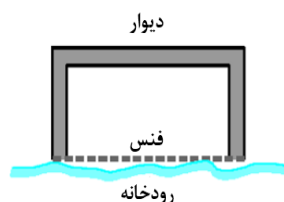
۴۶) با طنابی به طول ۴۰ متر زمینی به شکل مقابل را محصور کرده‌ایم. بیش‌ترین مساحت محصور شده ممکن کدام است؟



- (۱) ۵۰
- (۲) ۷۵
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۱۲۵

۴۷) با توجه به ضرایب معادله و علامت آنها، در مورد تعداد و علامت‌های ریشه‌های معادله $3x^2 - x - 1 = 0$ بحث کنید. (بدون حل معادله)

۴۸) می‌خواهیم کنار یک رودخانه تفریح‌گاهی مستطیل شکل به مساحت ۱۵۵۰ مترمربع بسازیم. قرار است یک ضلع آن فنس و سه ضلع دیگر دیوار باشد. اگر هزینه هر متر دیوار و فنس به ترتیب ۲۵ و ۶ واحد پول باشد، کمترین هزینه محصور کردن چند واحد پول است؟



- (۱) ۳۰۰۰
- (۲) ۲۹۰۰
- (۳) ۳۱۰۰
- (۴) ۳۲۰۰

سوال ۱

گزینه درست: ۲

گزینه های دام دار ۳

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۲۲٪

متوسط

گزینه «۲»

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم $x^2 + (m - 4)x - m = 0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= 16\alpha\beta \Rightarrow S^2 - 2P = 16P \\ \Rightarrow S^2 &= 18P \Rightarrow \left(-\frac{m-4}{1}\right)^2 = 18\left(\frac{-m}{1}\right) \\ \Rightarrow (m-4)^2 &= -18m \Rightarrow m^2 - 8m + 16 = -18m \\ \Rightarrow m^2 + 10m + 16 &= 0 \Rightarrow (m+8)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

در انتها، باید بررسی کنیم که به ازای این مقادیر به دست آمده، Δ منفی نشود:

$$m = -2 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$m = -8 \Rightarrow x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

سوال ۲

گزینه درست: ۳

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۵۲٪

ساده

گزینه «۳»

باید $\Delta < 0$ باشد: $(m-1)^2 - 36 < 0 \Rightarrow (m-1)^2 < 36$

$$\xrightarrow{\text{جزر}} |m-1| < 6 \Rightarrow -6 < m-1 < 6 \Rightarrow -5 < m < 7$$

سوال ۳

گزینه درست: ۱

گزینه های دام دار ۳

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۱۳٪

دشوار

گزینه «۱»

بیشترین مقدار سهمی (یا همان ماکزیمم) عرض رأس سهمی است، پس باید عرض رأس را برابر ۱ قرار دهیم:

$$\begin{aligned}y &= mx^2 - (m+3)x + 5 \\ \frac{-\Delta}{4a} &= 1 \Rightarrow -\frac{(m+3)^2 - 4(m)(5)}{4m} = 1 \\ \Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 20m &= -4m \\ \Rightarrow m^2 - 10m + 9 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 9 \end{cases}\end{aligned}$$

با توجه به این که $m = 1$ و $m = 9$ هر دو مثبت‌اند و سهمی $y = mx^2 - (m+3)x + 5$ وقتی ماکزیمم دارد که ضریب x^2 منفی باشد، لذا $m < 0$ ، پس هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده قابل قبول نیست.

ساده

درصد پاسخگویی ۵۲٪

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۱

سوال ۴

گزینه «۱»

فرض کنید آن عدد x باشد، مسئله را به صورت معادله زیر می‌نویسیم:

$$x + 1 = 2\sqrt{x} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$$

اگر $\sqrt{x} = t$ باشد، نتیجه می‌گیریم:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

معادله فقط یک جواب دارد.

دشوار

خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه درست: ۱

سوال ۵

گزینه «۱»

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - x - 4 = 0$ هستند، بنابراین:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = -4$$

حال مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را به دست می‌آوریم:

$$S' = (x_1^2 + \frac{1}{x_2}) + (x_2^2 + \frac{1}{x_1}) = x_1^2 + x_2^2 + (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2})$$

$$= (S^2 - 2PS) + (\frac{S}{P}) = (1)^2 - 2(-4)(1) + \frac{1}{-4} = \frac{51}{4}$$

$$P' = (x_1^2 + \frac{1}{x_2})(x_2^2 + \frac{1}{x_1}) = (x_1 x_2)^2 + (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{x_1 x_2}$$

$$= P^2 + (S^2 - 2P) + \frac{1}{P} = (-4)^2 + (1^2 - 2(-4)) + \frac{1}{-4}$$

$$= \frac{-221}{4}$$

معادله مورد نظر برابر است با:

$$x^2 - S'x + P' = 0$$

$$x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} \xrightarrow{\times 4} 4x^2 = 51x + 221$$

گزینه «۴»

رأس سهمی نقطه $(1, 1)$ است، پس می‌توان ضابطه آن را به صورت $f(x) = a(x-1)^2 + 1$ در نظر گرفت. از طرفی نقطه $(0, 0)$ روی سهمی قرار دارد، بنابراین:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a(0-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x-1)^2 + 1$$

خط هم از نقاط $(1, 0)$ و $(0, 1)$ عبور کرده، پس:

$$\text{شیب خط } m = \frac{0-1}{1-0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = g^2(x) \Rightarrow -(x-1)^2 + 1 = (-x+1)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{رأس سهمی } ax^2+bx+c=0]{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

گزینه «۲»

$$3x^2 - (k+1)x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} \frac{(k+1)}{3} = 2$$

$$\Rightarrow k+1=6 \Rightarrow k=5$$

$$\xrightarrow{k=5} f(x) = 2x^2 + 2x - 5$$

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = -5/2$$

گزینه «۲»

$$f(x) = a(x-1)(x-3)$$

تابع از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، پس: $f(2) = 1$

$$\Rightarrow 1 = a(2-1)(2-3) \Rightarrow 1 = -a \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -1(x-1)(x-3) = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{محل برخورد با محور } y} f(0) = -3$$

گزینه «۱»

$$x^2 - 6x - 2 = 0 \quad (\Delta > 0) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = 6 \\ P = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

عبارت $4\alpha^2 - 12\alpha + 2\beta^2$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\underbrace{2\alpha^2 + 2\beta^2}_I + \underbrace{2\alpha^2 - 12\alpha}_{II} \\ I \Rightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) = 2(S^2 - 2P) = 2 \times (36 + 4) = 80$$

برای به دست آوردن عبارت II کافیهست معادله درجه دوم را به صورت $x^2 - 6x = 2$ نوشته و سپس $x = \alpha$ را که یکی از ریشه های آن است در معادله جایگذاری کنیم:

$$\alpha^2 - 6\alpha = 2 \xrightarrow{\times 2} \underbrace{2\alpha^2 - 12\alpha}_{II} = 4 \\ \Rightarrow I + II = 80 + 4 = 84$$

گزینه «۳»

چون نمودار بر محور x مماس است:

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4m(1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $m = 0$ ضریب x^2 برابر صفر و تابع ثابت $y = 1$ به دست می آید پس $m = 4$ قابل قبول است.

گزینه «۱»

$$\text{معادله محور تقارن } x = \frac{-b}{2a} = \frac{k}{2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow k = -4$$

$$\xrightarrow{k=-4} y = 3x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(3)(1) = 4$$

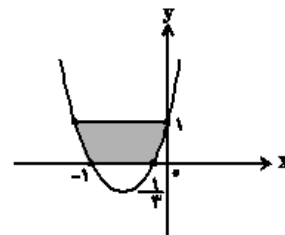
$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{-4+2}{2(3)} = -\frac{1}{3} \\ x_B = \frac{-4-2}{2(3)} = -1 \end{cases}$$

در نقطه C ، $x = 0$ است، پس $y = 1$ می باشد. برای به دست آوردن نقطه D داریم:

$$3x^2 + 4x + 1 = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ x_D = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

(D و C نسبت به محور تقارن سهمی متقارن هستند.)



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (\text{قاعده کوچک} + \text{قاعده بزرگ}) \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \times 1 = 1$$

گزینه «۳»

برای حل این معادله، عبارت $x^2 - 2x$ را t در نظر گرفته و داریم:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \xrightarrow{\text{بهر روش } a+c=b} \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین سه ریشه حقیقی متمایز خواهیم داشت.

ساده

درصد پاسخگویی ۴۷٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۳

گزینه «۲»

اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر x و y باشند، با توجه به این که محیط آن برابر ۶۰ متر است. بنابراین:

$$2(x + y) = 60 \Rightarrow x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - x$$

از طرفی مساحت مستطیل یعنی xy برابر ۱۸۹ می باشد. پس:

$$xy = 189 \xrightarrow{y=30-x} x(30-x) = 189$$

$$\Rightarrow x^2 - 30x + 189 = 0, \Delta = 144$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{144}}{2} \xrightarrow{x > y} x = 21, y = 30 - 21 = 9 \Rightarrow x - y = 12$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۹٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۴

گزینه «۲»

$$S = \alpha + \beta = 2$$

$$P = \alpha\beta = -5$$

$$\Rightarrow (\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2 + 2\beta + 1$$

$$= S^2 - 2P + 2S + 2 = 4 + 10 + 4 + 2 = 20$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۴٪

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: ۱

سوال ۱۵

گزینه «۱»

اگر α و β را ریشه های معادله بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4a+1}{a} \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$$

$$\alpha = 10\beta - 3 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 = 10\alpha\beta - 3\alpha \xrightarrow{\alpha\beta=4} \alpha^2 = 40 - 3\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 40 = 0 \Rightarrow (\alpha + 8)(\alpha - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

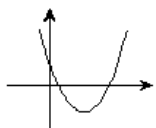
$$\begin{cases} \alpha = -8 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{4a+1}{a} = \frac{-17}{2} \Rightarrow a = -\frac{2}{17} \\ \alpha = 5 \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow S = \frac{4a+1}{a} = \frac{29}{5} \Rightarrow a = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a \text{ مقدار مثبت}} a = \frac{5}{9}$$

توجه: دلتای معادله $\Delta = 1 + 4a$ است که به ازای دو مقدار بدست آمده، مثبت است..

گزینه «۳»

می‌دانیم اگر $(a+6) > 0$ (ضریب x^2) معادله درجه دوم رو به بالاست. حال حالت‌هایی را که ضریب x^2 مثبت و معادله درجه دوم از ناحیه چهارم عبور کند از $a+6 > 0$ کم می‌کنیم.



$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 \text{ ضریب } > 0 \Rightarrow a+6 > 0 \Rightarrow a > -6 \\ b < 0 \Rightarrow a-2 < 0 \Rightarrow a < 2 \end{array} \right\} \S -6 < a < 2 \S$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 4(a+6) > 0 \Rightarrow (a^2 - 4a + 4) - 4a - 24 > 0$$

$$a^2 - 8a - 20 > 0 \Rightarrow (a-10)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \quad \text{یا} \quad a > 10 \quad (2)$$

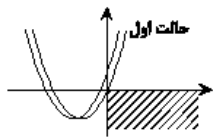
$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -6 < a < -2$$

حال اگر از $a > -6$ ، $-6 < a < -2$ را کم کنیم $a \geq -2$ به دست می‌آید.

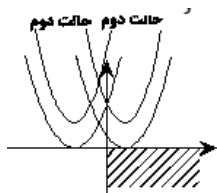
روش دوم: در حالت‌های زیر معادله درجه دوم از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

$$\text{حالت اول} \left\{ \begin{array}{l} a+6 > 0 \Rightarrow a > -6 \\ b > 0 \Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \\ \Delta > 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 4(a+6) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow a > 10 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^2 - 8a - 20 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 10 \\ a < -2 \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (a+6) > 0 \Rightarrow a > -6 \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 - 8a - 20 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 10 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \leq a \leq 10 \quad (2)$$



$$\xrightarrow{(1), (2)} a \geq -2$$

چون $x = 2$ یکی از صفرهای تابع است پس به ازای آن مقدار تابع صفر می‌شود.

$$2^3 - 2^2 + k(2) + 4 = 0 \Rightarrow 8 + 2k = 0 \Rightarrow k = -4$$

برای یافتن صفرهای دیگر ضابطه تابع را بر $(x - 2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x - 2 \\ - (x^3 - 2x^2) & \\ \hline x^2 - 4x + 4 & \\ - (x^2 - 2x) & \\ \hline -2x + 4 & \\ - (-2x + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

حال در معادله $x^2 + x - 2 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-2) = 5$$

توجه: ریشه‌های معادله $x^2 + x - 2 = 0$ برابر $x_1 = 1$ و $x_2 = -2$ هستند که در این صورت:

$$x_1^2 + x_2^2 = 5$$

با فرض $x^2 = u$ داریم: $u^2 - mu + m - 1 = 0$

معادله برحسب u باید یک ریشه مضاعف داشته باشد تا معادله برحسب x دارای دو ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times (1) \times (m - 1) = m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=2} x^4 - 2x^2 + 1 &= 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \\ \Rightarrow (x - 1)^2 (x + 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

معادله دارای دو ریشه مضاعف $x = 1$ و $x = -1$ است.

شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی باشد این است که $\Delta > 0$ باشد، همچنین شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد این است که $P > 0$ و $S > 0$ و باید بین نتایج حاصل از این سه شرط اشتراک بگیریم:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow \Delta = 4m^2 - 4(m+6)(m-3) \\ &= 4m^2 - 4m^2 - 12m + 72 = -12m + 72 > 0 \\ &\Rightarrow m < 6 \end{aligned}$$

$$P > 0 \Rightarrow P = \frac{m-3}{m+6} > 0 \Rightarrow (m < -6) \cup (3 < m)$$

$$S > 0 \Rightarrow S = \frac{2m}{m+6} > 0 \Rightarrow (m < -6) \cup (0 < m)$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{N}} 3 < m < 6 \Rightarrow m = 4, 5$$

سوال ۲۰

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۵٪

متوسط

گزینه «۳»

معادله سهمی‌ای را که دو ریشه آن x_1 و x_2 باشد، می‌توان به شکل $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نوشت، بنابراین معادله سهمی به شکل $y = a(x + 2)(x - 6)$ می‌باشد. برای محاسبه a کافی است مختصات نقطه $(-3, 6)$ را در سهمی قرار دهیم. بنابراین:

$$6 = a(-3 + 2)(-3 - 6)$$

$$6 = 9a \Rightarrow a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

سوال ۲۱

گزینه درست: ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۶۱٪

ساده

از آنجا که سهمی ماکزیمم دارد پس $a < 0$ و با توجه به این‌که سهمی محور y ها را در نقطه‌ای مثبت قطع کرده است، $c > 0$ ؛ همچنین مختصات طول رأس سهمی مثبت است، پس: $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ، در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} > 0 \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b > 0$$

چون سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است پس معادله $P(x) = 0$ دو ریشه دارد.

سوال ۲۲

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۲٪

دشوار

اگر $x = -2$ را در معادله قرار دهیم، به رابطه $4a - 2b + c = 0$ می‌رسیم که همان رابطه صورت سؤال است؛ بنابراین یکی از ریشه‌ها $x_1 = -2$ است. ریشه دیگر را x_2 می‌نامیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = -2 + x_2 \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 = -2x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{c}{2a} \end{array} \right.$$

سوال ۲۳

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۷٪

متوسط

$$P(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} P(2) = 4a + 2b + 1 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \\ \Rightarrow 2a + b = -1 \\ x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -b = 4a \\ \Rightarrow b = -4a \end{array} \right\} \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = -4\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow a + b + c = \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

سوال ۲۴

گزینه درست: ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۸٪

متوسط

اگر معادله درجه دوم، دو ریشه حقیقی معکوس داشته باشد حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با یک است. بنابراین:

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2m}{m - 2} = 1 \Rightarrow \frac{m(m - 2)}{m - 2} = 1 \xrightarrow{m - 2 \neq 0} m = 1$$

سوال ۲۵

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۴%

متوسط

با توجه به معادله $2x^2 - 5x - 6 = 0$ می‌توان گفت که:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

مجموع ریشه‌های معادله $3x^2 + kx + m = 0$ برابر $-\frac{k}{3} = -\frac{b}{a}$ است. از طرفی اگر ریشه‌های این معادله را $\beta^3\alpha$ و $\alpha^3\beta$ فرض کنیم، داریم:

$$\alpha^3\beta + \beta^3\alpha = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = -3\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(-3)\right)$$

$$= -3\left(\frac{25}{4} + 6\right) = -3\left(\frac{25+24}{4}\right) = -\frac{147}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{3} = -\frac{147}{4} \Rightarrow k = \frac{441}{4}$$

سوال ۲۶

گزینه درست: ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۲%

متوسط

گزینه «۲»

محیط شکل برابر است با: $4x + 4y = 40 \Rightarrow y = 10 - x$

مساحت شکل برابر است با: $S = 2xy + xy = 3xy$

$$= 3x(10 - x)$$

$$= -3x^2 + 30x$$

بیش‌ترین مقدار این عبارت درجه دوم برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است:

$$S_{\max} = \frac{-900}{4(-3)} = 75$$

سوال ۲۷

گزینه درست: null

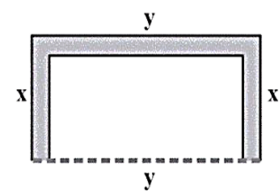
سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

متوسط

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

ابتدای معادله را می‌یابیم. از آن جا که $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-1) = 13$ مثبت است، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد. از طرفی حاصلضرب ریشه‌های معادله $P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$ منفی است، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

گزینه «۳»



$$xy = 1550 \Rightarrow y = \frac{1550}{x}$$

$$(2x + y) \times 25 + 6y = 50x + 31y \quad \text{هزینه حصارکشی:}$$

$$P(x) = 50x + \frac{31 \times 1550}{x} \quad \text{هزینه حصارکشی:}$$

$$P'(x) = 50 - \frac{31 \times 1550}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{31 \times 1550}{50} \Rightarrow x = 31$$

$$P(31) = 50 \times 31 + \frac{31 \times 1550}{31} = 3100$$